

La série suivante (écrite en latex) est-elle convergente?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

 Pour déterminer si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ est convergente, nous devons examiner son comportement.

1. **Analyse du terme général :**

Considérons le terme général de la série :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

2. **Comportement pour n pair et impair :**

- Si n est pair, disons $n = 2k$, alors :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{\sqrt{2k+(-1)^{2k}}} = \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

- Si n est impair, disons $n = 2k+1$, alors :

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{\sqrt{2k+1+(-1)^{2k+1}}} = \frac{-1}{\sqrt{2k+1}-1}$$

3. **Comparaison avec une série connue :**

Pour n grand, \sqrt{n} devient beaucoup plus grand que 1, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \approx \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\sqrt{2k+1}-1} \approx \frac{-1}{\sqrt{2k+1}}$$

Ces termes ressemblent à ceux de la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4. **Critère de convergence pour les séries alternées :**

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée. Selon le critère de Leibniz, une série alternée $\sum (-1)^n b_n$ converge si :

- b_n est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Ici, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et tend vers 0. Donc, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

5. **Conclusion :**

Par comparaison, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ se comporte de manière similaire à une série alternée convergente.

Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ est convergente.

Et cette série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$



Pour déterminer si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$ est convergente, nous devons examiner son comportement.

1. Analyse du terme général :

Considérons le terme général de la série :

$$a_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$

2. Comportement de $\sin(n)$:

La fonction $\sin(n)$ oscille entre -1 et 1. Cependant, contrairement à une série alternée régulière, $\sin(n)$ ne suit pas un motif simple d'alternance pour tous les n .

3. Comparaison avec une série connue :

Pour n grand, \sqrt{n} devient beaucoup plus grand que $\sin(n)$, donc :

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)} \approx \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$$

Cela ressemble à la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

4. Critère de convergence pour les séries :

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ est une série dont les termes oscillent. Cependant, la présence de $\sin(n)$ au numérateur ne garantit pas que la série converge, car $\sin(n)$ ne tend pas vers zéro et n'assure pas une alternance régulière.

5. Conclusion :

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$ ne converge pas nécessairement, car les termes ne tendent pas vers zéro de manière régulière et ne satisfont pas les critères de convergence des séries alternées.

Ainsi, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$ est probablement divergente.

Raisonnement terminé pendant 16 secondes >

Nous pouvons étudier la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$

en remarquant quelques points importants :

1. Point de départ :

Pour $n = 0$, $\sin(0) = 0$ et $\sqrt{0} + \sin(0) = 0$ ce qui pose un problème (division par zéro). On commencera donc plutôt à $n = 1$.

2. Comportement asymptotique pour n grand :

Pour n grand, \sqrt{n} devient très grand tandis que $\sin(n)$ reste borné entre -1 et 1. On a donc, pour n grand,

$$\sqrt{n} + \sin(n) \sim \sqrt{n},$$

et ainsi

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)} \sim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}.$$

3. Étude de la série $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$:

Les termes $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ ne convergent pas absolument, car

$$\left| \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ (une série p avec $p = \frac{1}{2}$) diverge.

Cependant, on peut appliquer le test de Dirichlet.

- La suite $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est positive, décroissante et tend vers 0.
- Les sommes partielles de $a_n = \sin(n)$ sont bornées (on peut montrer, en utilisant la formule de la somme géométrique pour e^{in} , que $\sum_{k=1}^N \sin(k)$ reste bornée).

Par le test de Dirichlet, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ converge conditionnellement.

4. Retour à la série initiale :

Pour n grand, $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$ se comporte de la même manière que $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$

converge conditionnellement, mais pas absolument.

Conclusion

La série (en commençant par $n = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$

converge conditionnellement (par le test de Dirichlet), mais elle ne converge pas absolument.

Si vous souhaitez utiliser la série en partant de $n = 0$, il faudra gérer le cas $n = 0$ (par exemple, en définissant explicitement le terme $a_0 = 0$).



Non la série diverge, regarde un équivalent de $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$

Où était l'erreur dans ton raisonnement?

Raisonnement terminé pendant 5 secondes >

La raison principale de l'erreur réside dans l'approximation asymptotique. Dans mon raisonnement initial, j'ai supposé que pour n grand,

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)} \sim \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}},$$

ce qui est vrai à première vue puisque $\sin(n)$ est borné et \sqrt{n} domine $\sin(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Cependant, il faut examiner plus précisément la différence entre les deux termes :

$$\Delta_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)} - \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}.$$

En combinant les fractions, on obtient :

$$\Delta_n = \frac{\sin(n)\sqrt{n} - \sin(n)(\sqrt{n} + \sin(n))}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin(n))} = \frac{-\sin^2(n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sin(n))}.$$

Pour n grand, puisque $\sqrt{n} + \sin(n) \sim \sqrt{n}$, on a approximativement :

$$\Delta_n \sim -\frac{\sin^2(n)}{n}.$$

Or, la moyenne de $\sin^2(n)$ est $1/2$. Ainsi, en moyenne, $\Delta_n \sim -\frac{1}{2n}$.

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge (la série harmonique diverge).

En d'autres termes, même si $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n+\sin(n)}}$ se rapproche de $\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n \rightarrow \infty$, l'erreur dans cette approximation, c'est-à-dire la différence Δ_n , est équivalente à $-\frac{1}{2n}$ en moyenne, et sa somme diverge.

Conclusion :

L'erreur dans mon raisonnement initial était de négliger l'impact de l'erreur d'approximation, qui, bien que de rang inférieur, a une somme divergente. Par conséquent, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n} + \sin(n)}$$

diverge.