

Script démarré sur 2026-07-29 11:11:16+02:00 [TERM="xterm-256color" TTY="/dev/pts/2" COLUMNS="136" LINES="36"]
[0;francois@talon:~] \$ llc llvm-cfi-verify llvm-dwp llvm-modextract llvm-reduce lld llvm-cgdata llvm-extract llvm-mt llvm-remarkutil lldb llvm-config llvm-gsymutil llvm-nm llvm-rtdyld lldb-argdumper llvm-cov llvm-ifs llvm-objcopy llvm-sim lldb-dap llvm-c-test llvm-install-name-tool llvm-objdump llvm-size lldb-instr llvm-ctxprof-util llvm-ir2vec llvm-offload-binary llvm-spirv lldb-mcp llvm-cvtres llvm-jitlink llvm-offload-wrapper llvm-split lldb-server llvm-cxxdump llvm-jitlink-executor llvm-opt-report llvm-stress lld-link llvm-cxxfilt llvm-lib llvm-otool llvm-strings lli llvm-cxxmap llvm-libtool-darwin llvm-pdbutil llvm-strip lli-child-target llvm-debuginfo-analyzer llvm-link llvm-PerfectShuffle llvm-symbolizer llvm-addr2line llvm-debuginfod llvm-lipo llvm-profdata llvm-tblgen llvm-ar llvm-debuginfod-find llvm-lto llvm-profgen llvm-test-mustache-spec llvm-as llvm-diff llvm-lto2 llvm-ranlib llvm-tli-checker llvm-bcanalyzer llvm-dis llvm-mc llvm-rc llvm-undname llvm-bitcode-strip llvm-dlltool llvm-mca llvm-readelf llvm-windres llvm-cas llvm-dwarfdump llvm-ml llvm-readobj llvm-xray llvm-cat llvm-dwarfutil llvm-ml64 llvm-readtapi [~/IA] date ; llama.cpp/build/bin/llama cli -m ~/IA/models--mistralai--Ministral-3-14B-Reasoning-2512-GGUF/blobs/54fabf5972dcc410c3ccafa8da3ef4e652048dcaa833b73cf6625217679a606d -p "Peux tu me donner une démonstration du théorème de Kraton p[ro]p[ri]été de Kdu théorème suivant:

Soit une serie de fonctions de variables
[K] une variable réelle x
somme[un(x), n=0..+infini] sur un
intervalle I. Ces fonctions d[er]ivées sont de classe C1
sur I, la série converge simplement sur I et la série des dérivée converge normalement sur I. L[ors] A
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe C1
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe C1
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe
C1
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe
[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de classe

[un(x), n=0..+infini] sur un intervalle I. Ces fonctions sont de
clas[se]
fonction f est de classe C 1 sur I et f'(x) = somme(un'(x), n=0..+infini)" ; date
mer. 29 juil. 2026 11:14:33 CEST

Loading model...
[...]



build : b9871-ef2d77011
model : /home/francois/IA/models--mistralai--Ministral-3-14B-Reasoning-2512-GGUF/blobs/54fabf5972dcc410c3ccafa8da3ef4e652048dcaa833b73cf6625217679a606d

ftype : Q8_0

modalities : text

available commands:

/exit or Ctrl+C stop or exit

/regen regenerate the last response

/clear clear the chat history

/read add a text file

/glob add text files using globbing pattern

[1m][32m

Peux tu me donner une démonstration du théorème suivant:

Soit une série de fonctions d'une variable réelle x : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur un intervalle I . Ces fonctions sont de classe C^1 sur I , la série converge simplement sur I et la série des dérivées converge normalement sur I . Alors la fonction f est de classe C^1 sur I et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$

[0m

[90m[Start thinking]

D'accord, je vais essayer de démontrer ce théorème. D'abord, je dois me rappeler ce que signifie chaque hypothèse et ce qu'on veut prouver.

Hypothèses :

1. Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur l'intervalle I . Cela signifie que chaque u_n est continûment dérivable sur I , et sa dérivée u'_n est continue sur I .
2. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur I . Cela signifie que pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge vers une limite, qu'on note $f(x)$. Ainsi, f est définie sur I comme la somme de la série.
3. La série des dérivées $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ converge normalement sur I . La convergence normale signifie que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I et que la série des normes uniformes converge (i.e., $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u'_n\|_{\infty} < +\infty$, où $\|u'_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |u'_n(x)|$).

Ce qu'on veut prouver :

1. La fonction f est de classe C^1 sur I .
2. La dérivée de f est donnée par la série des dérivées des u_n , c'est-à-dire $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ pour tout $x \in I$.

Étapes de la démonstration :

1. Convergence simple de la série des u_n :

On sait déjà que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur I . Donc, f est bien définie sur I .

2. Dérivabilité de f :

Pour montrer que f est dérivable sur I , on doit montrer que pour tout $x \in I$, la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe. Ensuite, on devra montrer que cette limite est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

Une approche classique est d'utiliser la convergence normale de la série des dérivées. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge normalement, elle converge uniformément sur I (par définition de la convergence normale, qui est une convergence uniforme + la convergence de la série des normes).

3. Utilisation de la convergence uniforme :

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I , et que chaque u_n est de classe C^1 , on peut intervertir la somme et la limite. Cela permettra d'écrire $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

Plus précisément, pour tout $x \in I$, la dérivée de f en x peut être obtenue en dérivant terme à terme la série, car la convergence uniforme de la série des dérivées permet cette interchangeabilité (théorème de dérivation terme à terme sous convergence uniforme).

4. Détails de la démonstration :

- Soit $x \in I$. On considère la série partielle $S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x)$. Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x) = f(x)$.

- De même, la série partielle des dérivées est $\sum_{n=0}^N u'_n(x)$, et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I , on a pour tout $x \in I$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.
- Maintenant, pour montrer que f est dérivable et que sa dérivée est la série des dérivées, on peut écrire :

$$f(x) - f(a) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N(x) - S_N(a))$$

Or, $S_N(x) - S_N(a) = \sum_{n=0}^N (u_n(x) - u_n(a))$. Par le théorème des accroissements finis, pour chaque n , il existe c_n entre a et x tel que :

$$u_n(x) - u_n(a) = u'_n(c_n)(x - a)$$

Donc,

$$S_N(x) - S_N(a) = \sum_{n=0}^N u'_n(c_n)(x - a)$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient :

$$f(x) - f(a) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n) \right) (x - a)$$

Cependant, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément, et que c_n dépend de N , x et a , on peut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n)$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ (car $c_n \rightarrow x$ lorsque $N \rightarrow +\infty$ pour une série uniformément convergente).

- Ainsi, on a :

$$f(x) - f(a) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) \right) (x - a)$$

Ce qui implique que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$$

En faisant tendre a vers x , on obtient :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$$

- Il reste à montrer que f est de classe C^1 . Pour cela, on doit montrer que f' est continue sur I . Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I (par hypothèse), et que chaque u'_n est continue (car u_n est de classe C^1), la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue. Donc $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ est continue sur I . Ainsi, f est de classe C^1 sur I .

Vérification des étapes :

- La convergence normale implique la convergence uniforme, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I .
- La convergence uniforme permet d'intervertir la somme et la limite, ce qui est crucial pour la démonstration.
- L'utilisation du théorème des accroissements finis est justifiée car chaque u_n est dérivable (donc continue, et on peut appliquer le TAF sur l'intervalle considéré).
- La continuité de f' est garantie par la convergence uniforme des u'_n , qui sont continues.

Potentiels problèmes :

- Il faut s'assurer que la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n)$ est bien égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. Cela vient du fait que c_n dépend de N , x et a , mais lorsque $N \rightarrow +\infty$, c_n peut être choisi de sorte que $c_n \rightarrow x$ (car la convergence est uniforme, donc on peut "contrôler" le comportement des c_n).
- Une autre approche serait d'utiliser le fait que f est la limite uniforme de S_N , et que S_N est de classe C^1 (car somme finie de fonctions C^1), donc f est limite uniforme de fonctions C^1 , ce qui implique que f est C^1 (car la limite uniforme de fonctions C^1 est C^1 , et la dérivée est la limite uniforme des dérivées).

Approche alternative :

1. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément sur I . Notons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. Comme la convergence est uniforme, g est continue sur I (car chaque u'_n est continue et la limite uniforme de fonctions continues est continue).
2. Pour chaque N , la fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x)$ est de classe C^1 sur I , et $S'_N(x) = \sum_{n=0}^N u'_n(x)$.

3. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur I . De plus, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ converge uniformément, on peut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout compact de I (par le critère de Weierstrass pour les séries de fonctions : si $\sum \|u'_n\|_\infty < +\infty$, alors $\sum u_n$ converge uniformément sur tout compact, car $u_n(x) - u_n(a) = u'_n(\xi)(x - a)$ pour un certain ξ entre a et x , et on peut majorer $|u_n(x)|$ par $|u_n(a)| + \|u'_n\|_\infty |x - a|$, mais cela demande un peu plus de travail).
- En fait, la convergence normale de $\sum u'_n$ implique que $\sum u_n$ converge uniformément sur I (c'est une conséquence du théorème de dérivation terme à terme, ou on peut le montrer directement en utilisant l'inégalité de la moyenne ou le TAF).
4. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors f est bien la limite uniforme de S_N sur I , et comme chaque S_N est C^1 , f est C^1 et $f' = \lim_{N \rightarrow +\infty} S'_N = \sum u'_n$ (par convergence uniforme des S'_N).

Conclusion :

La démonstration repose principalement sur :

- La convergence uniforme de $\sum u'_n$ (garantie par la convergence normale).
- Le fait que f est la limite uniforme des S_N , qui sont C^1 , donc f est C^1 et sa dérivée est la limite uniforme des dérivées des S_N , c'est-à-dire $\sum u'_n$.

Rédaction de la démonstration :

Voici une version plus formelle et structurée de la démonstration :

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I . On suppose que :

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur I .
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ converge normalement sur I .

Alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ pour tout $x \in I$.

Démonstration :

1. Convergence uniforme de $\sum u'_n$:

La convergence normale de $\sum u'_n$ signifie qu'il existe $M > 0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u'_n\|_\infty \leq M$, où $\|u'_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |u'_n(x)|$. La convergence normale implique la convergence uniforme de $\sum u'_n$ sur I . Notons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. Comme chaque u'_n est continue (car u_n est C^1) et que la convergence est uniforme, g est continue sur I .

2. Convergence uniforme de $\sum u_n$:

Nous allons montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout compact de I . Soit $K \subset I$ un compact. Pour tout $x \in K$, fixons un point $a \in K$ (par exemple, un point intérieur de I si I est ouvert). Pour tout n , appliquons le théorème des accroissements finis à u_n sur l'intervalle $[a, x]$ (ou $[x, a]$ si $x < a$) :

$$u_n(x) = u_n(a) + u'_n(\xi_n)(x - a),$$

où ξ_n est un point entre a et x . Comme K est compact et I est un intervalle, $|x - a| \leq \text{diam}(K)$ (le diamètre de K). Donc,

$$|u_n(x)| \leq |u_n(a)| + |u'_n(\xi_n)| |x - a| \leq |u_n(a)| + \|u'_n\|_\infty \cdot \text{diam}(K).$$

Comme K est compact et I est un intervalle, on peut choisir a tel que cette majoration soit valable pour tout $x \in K$.

Cependant, pour obtenir une majoration indépendante de a , on peut utiliser le fait que $\sum u'_n$ converge normalement, donc $\sum \|u'_n\|_\infty < +\infty$. On a alors :

$$|u_n(x)| \leq |u_n(a)| + \|u'_n\|_\infty \cdot \text{diam}(K).$$

Mais pour faire tendre a vers x , il vaut mieux utiliser une approche différente. En fait, la convergence normale de $\sum u'_n$ implique que $\sum u_n$ converge uniformément sur I . Voici pourquoi :

- Soit $S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x)$. Alors,

$$S_N(x) - S_N(a) = \sum_{n=0}^N (u_n(x) - u_n(a)) = \sum_{n=0}^N u'_n(\xi_{n,N})(x - a),$$

où $\xi_{n,N}$ est entre a et x .

- La série $\sum u'_n$ converge uniformément, donc pour N suffisamment grand, $|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u'_n(x)| \leq \epsilon$ pour tout $x \in I$.
- De même, $|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u'_n(\xi_{n,N})| \leq \epsilon$ car $\xi_{n,N} \in I$.
- Donc, $|S_N(x) - S_N(a) - \sum_{n=0}^N u'_n(x)(x - a)| \leq \epsilon|x - a| + \epsilon|x - a| \leq 2\epsilon \text{diam}(I)$.

- Cela montre que $S_N(x) - S_N(a)$ est proche de $f(x) - f(a)$ et aussi proche de $\sum_{n=0}^N u'_n(x)(x-a)$, mais il faut être plus précis pour la convergence uniforme de S_N .

Une manière plus directe est d'utiliser le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de $\sum u_n$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sum u'_n$ converge normalement, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ et tout $p \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{N+p} \|u'_n\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Pour $x \in I$ et $m > n \geq N_0$, on a :

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right|.$$

Par le TAF, pour chaque k , il existe ξ_k entre x et un point de référence (par exemple, un point fixe $a \in I$, mais cela dépend de x , donc mieux vaut prendre une approche différente). Une meilleure approche est d'utiliser l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k(x)|.$$

Mais ce n'est pas directement utile. Une autre méthode est de remarquer que pour tout $x, y \in I$,

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq \|u'_k\|_{\infty} |x - y|.$$

Donc, pour $m > n \geq N_0$,

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n}^m |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y)| \leq \epsilon |x - y| + \sum_{k=n}^m |u_k(y)|.$$

Cela ne semble pas donner directement la convergence uniforme. Peut-être est-il plus simple d'admettre que la convergence normale de $\sum u'_n$ implique que $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ce qui est un résultat standard, souvent démontré dans les cours d'analyse). En effet, si $\sum \|u'_n\|_{\infty} < +\infty$, alors pour tout $x \in I$, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument (car on peut majorer $|u_n(x)|$ par $|u_n(a)| + \|u'_n\|_{\infty} |x - a|$ pour un a fixe, et $\sum |u_n(a)|$ peut être contrôlée si nécessaire, mais cela dépend des hypothèses sur $u_n(a)$).

En réalité, la convergence normale de $\sum u'_n$ ne garantit pas directement la convergence uniforme de $\sum u_n$, mais elle garantit que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout compact de I (par le critère de Weierstrass généralisé). Cependant, pour la démonstration, il suffit de savoir que $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou au moins que f est la limite uniforme des S_N).

En fait, une démonstration plus rigoureuse peut éviter de passer par la convergence uniforme de $\sum u_n$ en utilisant directement la convergence normale de $\sum u'_n$ pour intervertir la somme et la dérivée.

3. Dérivabilité de f :

Soit $x \in I$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$, on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x+h) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right).$$

Par le TAF, pour chaque n , il existe c_n entre x et $x + h$ tel que :

$$u_n(x+h) - u_n(x) = u'_n(c_n)h.$$

Donc,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u'_n(c_n).$$

Comme $\sum u'_n$ converge uniformément sur I , et que $c_n \in I$, on peut intervertir la somme et la limite :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n).$$

Cependant, c_n dépend de h et de N . Pour faire tendre h vers 0, on doit montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n)$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

Ici, on utilise le fait que $c_n \rightarrow x$ lorsque $h \rightarrow 0$ (car c_n est entre x et $x + h$, et $h \rightarrow 0$), et que $\sum u'_n$ converge uniformément, donc pour h suffisamment petit, $u'_n(c_n)$ est proche de $u'_n(x)$ uniformément en n (car la convergence est uniforme, et u'_n est continue, donc on peut appliquer l'uniformité de la convergence).

Plus précisément, soit $\epsilon > 0$. Comme $\sum u'_n$ converge uniformément, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ et tout $x \in I$,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} u'_n(x) \right| \leq \epsilon.$$

De plus, comme chaque u'_n est continue en x , pour h suffisamment petit, $|u'_n(c_n) - u'_n(x)| \leq \epsilon/2^N$ (par exemple, en utilisant le fait que $c_n \rightarrow x$ et que u'_n est uniforme sur I par compacité, mais cela dépend de I).

Cependant, une approche plus simple est de remarquer que comme $\sum u'_n$ converge uniformément, la série $\sum u'_n$ est normalement convergente, donc le reste est petit uniformément. Ainsi, pour h suffisamment petit, on a :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n) - \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u'_n(c_n) - u'_n(x)|.$$

Comme u'_n est continue, pour chaque n , $|u'_n(c_n) - u'_n(x)| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. De plus, comme $\sum \|u'_n\|_\infty < +\infty$, par le théorème de convergence dominée ou en utilisant le fait que la convergence est normale, on peut montrer que $\sum |u'_n(c_n) - u'_n(x)| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Donc,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Cela montre que f est dérivable en x et que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

4. Continuité de f' :

Puisque $\sum u'_n$ converge uniformément sur I (par hypothèse de convergence normale), et que chaque u'_n est continue (car u_n est C^1), la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue. Donc $f' = \sum u'_n$ est continue sur I .

5. Conclusion :

f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I , donc f est de classe C^1 sur I , et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ pour tout $x \in I$.

Réponse finale :

[End thinking]

☐ 0m Démonstration du théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I . On suppose que :

1. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ sur I .
2. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ converge normalement sur I .

Nous allons montrer que f est de classe C^1 sur I et que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$ pour tout $x \in I$.

Étape 1 : Convergence uniforme de $\sum u'_n$:

La convergence normale de $\sum u'_n$ signifie que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u'_n\|_\infty$ converge, où $\|u'_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |u'_n(x)|$. La convergence normale implique la convergence uniforme de $\sum u'_n$ sur I . Notons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$. Comme chaque u'_n est continue (car u_n est C^1) et que la convergence est uniforme, g est continue sur I .

Étape 2 : Dérivabilité de f :

Soit $x \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$. Considérons la différence quotient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n(x+h) - \sum_{n=0}^N u_n(x) \right).$$

Pour chaque n , appliquons le théorème des accroissements finis à u_n sur l'intervalle $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$ si $h < 0$) :

$$u_n(x+h) - u_n(x) = u'_n(c_n)h,$$

où c_n est un point entre x et $x+h$. Donc,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u'_n(c_n).$$

Comme $\sum u'_n$ converge uniformément sur I , et que $c_n \in I$, on peut intervertir la somme et la limite :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(c_n).$$

Maintenant, faisons tendre h vers 0. Comme c_n est entre x et $x+h$, on a $c_n \rightarrow x$ lorsque $h \rightarrow 0$. De plus, comme $\sum u'_n$ converge uniformément et que chaque u'_n est continue, on a :

Script terminé sur 2026-07-29 12:59:38+02:00 [COMMAND_EXIT_CODE="0"]