Comment se fait la version simultanée en détail?

La version simultanée du théorème d'approximation de Dirichlet généralise le résultat à plusieurs réels, avec une démonstration reposant sur deux méthodes principales : le **principe des tiroirs multidimensionnel** et le **théorème de Minkowski**. Voici les détails :

Démonstration par le principe des tiroirs multidimensionnel

Pour approcher simultanément

$$d$$

réels

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_d$$

avec un même dénominateur

$$q$$

, on procède ainsi :

1. **Fractionnal parts multidimensionnelles** :
   Pour
   $$k \in \{0, 1, \ldots, N^d\}$$
   , considérez les parties fractionnaires :
   $$x_k^{(j)} = k\alpha_j - \lfloor k\alpha_j \rfloor \in [0, 1) \quad (1 \leq j \leq d)$$
   Ce qui définit
   $$N^d + 1$$
   points dans l'hypercube
   $$[0, 1)^d$$
   .
2. **Partitionnement de l'hypercube** :
   Subdivisez
   $$[0, 1)^d$$
   en
   $$N^d$$
   sous-hypercubes de côté
   $$\frac{1}{N}$$
   . Par le principe des tiroirs, deux points
   $$x_{k_1}^{(j)}$$
   et
   $$x_{k_2}^{(j)}$$
   (avec
   $$k_1 < k_2$$

) tombent dans le même sous-hypercube[1] [2].

3. **Construction des entiers solution** :
   Posons
   $$q = k_2 - k_1$$
   (vérifiant
   $$1 \leq q \leq N^d$$
) et
   $$p_j = \lfloor k_2 \alpha_j \rfloor - \lfloor k_1 \alpha_j \rfloor$$
   . On obtient pour chaque
   $$j$$
   :
   $$|q\alpha_j - p_j| = |(k_2 - k_1)\alpha_j - (\lfloor k_2 \alpha_j \rfloor - \lfloor k_1 \alpha_j \rfloor)| = |x_{k_2}^{(j)} - x_{k_1}^{(j)}| < \frac{1}{N}$$
   Ceci garantit
   $$\max_{1 \leq j \leq d} |q\alpha_j - p_j| < \frac{1}{N}$$
   , avec
   $$q \leq N^d$$
   [1] [3].

Démonstration par le théorème de Minkowski

Cette méthode géométrique exploite la théorie des réseaux :

1. **Construction de l'ensemble**
   $$S$$
   :
   Définissez dans
   $$\mathbb{R}^{d+1}$$
   l'ensemble :
   $$S = \left\{ (x, y_1, \ldots, y_d) : |x| \leq N,\ |\alpha_j x - y_j| \leq \frac{1}{N^{1/d}}\ \forall j \right\}$$
2. **Calcul du volume** :
   Le volume de
   $$S$$
   vaut :
   $$\text{Vol}(S) = 2N \times \left(\frac{2}{N^{1/d}} \right)^d = 2^{d+1}$$
   Ce volume dépasse
   $$2^{d+1}$$
   , seuil critique du théorème de Minkowski[4] [5].
3. **Application du théorème** :
   Minkowski garantit l'existence d'un point non nul
   $$(q, p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$$
   dans
   $$S$$

, vérifiant :

$$|q| \leq N \quad \text{et} \quad |q\alpha_j - p_j| \leq \frac{1}{N^{1/d}} \quad \forall j$$

En ajustant

$$N$$

, on obtient directement la version simultanée du théorème[4] [5].

Applications et implications

- **Mesure d'irrationalité** : Pour tout irrationnel

$$\alpha$$

, il existe une infinité de

$$\frac{p}{q}$$

avec

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{1+1/d}}$$

[2] [1].
- **Cryptographie** : Utilisé dans l'analyse de schémas de chiffrement basés sur les réseaux[2].
- **Optimisation** : La généralisation multidimensionnelle est cruciale en optimisation diophantienne[3].

Ces démonstrations illustrent la complémentarité entre méthodes combinatoires (principe des tiroirs) et géométriques (Minkowski) en théorie des nombres.

⁂

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_des_tiroirs
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_d'approximation_de_Dirichlet
3. https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=.%2Fd%2Fdirichletapprox.html
4. https://handwiki.org/wiki/Dirichlet's_approximation_theorem
5. https://math.stackexchange.com/questions/557852/dirichlets-approximation-theorem-simultaneous-version-proof-via-minkowskis