

Comment montre-t-on que la fonction S définie par $x \mapsto S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$?

Pour démontrer que la fonction

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

n'est pas bornée sur

$\mathbb{R}$

, on analyse son comportement asymptotique en exploitant des arguments d'approximation diophantienne et de séries oscillantes :

1. Découpage de la série

Pour

x

grand, scindons la série en deux parties :

- **Partie principale** (

$$n \leq N$$

) : Les termes

$$\frac{x}{n}$$

sont suffisamment grands pour que

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

oscille rapidement.

- **Queue de la série** (

$$n > N$$

) :

$$\frac{x}{n}$$

est petit, donc

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \approx \frac{x}{n}$$

, et la somme se comporte comme

$$\sum_{n>N} \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{N}$$

2. Contrôle de la queue

En choisissant

$$N = \Theta(x)$$

, la queue

$$\sum_{n>N} \frac{x}{n^2}$$

devient

$$O(1)$$

. La contribution dominante provient donc des

$$n \leq N$$

.

3. Approximation simultanée de phases

Pour maximiser

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

, on cherche

$$x$$

tel que

$$\frac{x}{n} \approx \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

pour un grand nombre de

$$n \leq N$$

.

- **Théorème d'approximation de Dirichlet** : Pour tout $\varepsilon > 0$

et

$$N \in \mathbb{N}^*$$

, il existe

$$x$$

tel que :

$$\left| \frac{x}{n} - \frac{\pi}{2} - 2\pi k_n \right| < \varepsilon \quad \forall n \leq N,$$

où

$$k_n \in \mathbb{Z}$$

. Cela garantit

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

.

4. Sommation harmonique

Pour de tels

$$x$$

, la somme principale se comporte comme :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - O(\varepsilon^2)) \sim \ln N.$$

En choisissant

$$N \rightarrow \infty$$

et

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

, on obtient

$$S(x) \geq \ln N - O(1) \rightarrow \infty$$

.

5. Conclusion

La possibilité de construire des

$$x$$

arbitrairement grands où

$$S(x)$$

dépasse toute constante fixée prouve que

$$S(x)$$

n'est pas bornée sur

$$\mathbb{R}$$

. Ce résultat s'appuie sur l'accumulation non négligeable des termes oscillants pour des

$$x$$

bien choisis ^[1] ^[2].

$$**$$

1. <https://math.stackexchange.com/questions/722356/growth-rate-of-n-sin-n>

2. <https://math.stackexchange.com/questions/670780/proof-that-the-sum-sum-n-1-infty-1n-sin-nx-is-bounded>